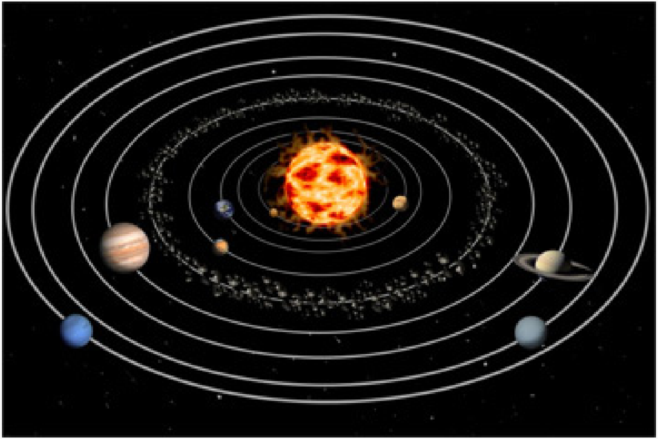
Introducción a las Menciones II: Computación Científica - Orbitas

Graeme Candlish

graeme.candlish@ifa.uv.cl

Contenido

Orbitas



Orbitas

Las órbitas de los planetas son elipses que cumplen con las leyes de Kepler:

1. Todos los planetas se desplazan alrededor del Sol describiendo órbitas elípticas. El Sol se encuentra en uno de los focos de la elipse.
2. El radio vector que une un planeta y el Sol recorre áreas iguales en tiempos iguales.
3. Para cualquier planeta, el cuadrado de su período orbital es directamente proporcional al cubo de la longitud del semieje mayor de su órbita elíptica.

Estas leyes se puede obtener de la aplicación de la mecánica newtoniana.

La segunda ley de Newton

El movimiento lineal de un objeto en la mecánica clásica newtoniana está descrito por la segunda ley de Newton:

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

donde $\vec{F}$ es la fuerza neta, $\vec{a}$ es la aceleración del objeto y m es su masa (inercial). Suponemos que el objeto no tiene grados de libertad internos, es decir, que es una partícula.

La segunda ley de Newton

La segunda ley se puede escribir en forma de una ecuación diferencial:

$$\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = \frac{\vec{F}}{m}.$$

La trayectoria del objeto, $\vec{x}(t)$, resulta de resolver esta ecuación. En el caso de una fuerza general es difícil resolver analíticamente la ecuación, pero si la forma matemática de la fuerza es suficientemente simple, si se puede resolverla.

Fuerza central

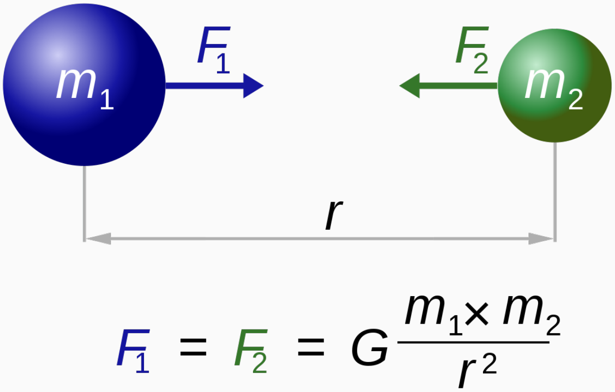
En el caso de la fuerza gravitacional, que es una fuerza central, es posible resolver la ecuación de movimiento (la segunda ley) analíticamente. Sin embargo, vamos a resolver la ecuación con un método numérico (es decir, con el computador).

Fuerza gravitacional de una masa puntual

Aproximaciones:

- Los planetas y el Sol son masas puntuales.
- Despreciamos los campos gravitatorios de los planetas (la masa del Sol es mucho mayor)

Fuerza gravitacional



Unidades etc.

1. Calcular la fuerza entre el Sol ($M = 1.99 \times 10^{30}$ [kg]) y la Tierra ($m = 5.97 \times 10^{24}$ [kg]) cuando la distancia es $d = 1.496 \times 10^{11}$ [m] (1 [AU]). $G = 6.67430 \times 10^{-11}$ [m^3 kg^{-1} s^{-2}].
2. Determinar el valor de la constante gravitacional G en unidades donde la masa está en masas solares, distancias en AU (unidades astronómicas), y tiempo en años (de la Tierra).
3. Repetir el cálculo en parte (1) usando las unidades de parte (2). ¿Cuáles son las unidades de fuerza ahora?

Ecuaciones diferenciales

La segunda ley $md^2\vec{x}/dt^2 = \vec{F}$ es una ecuación diferencial de segundo órden.

Tarea: Definimos $\vec{v} = d\vec{x}/dt$. Escribir la segunda ley como dos ecuaciones diferenciales de primer órden (que tienen solamente primeras derivadas).

Diferencias finitas

Necesitamos calcular las derivadas con respecto al tiempo con el computador. La definición de una derivada (de primer órden) está dada por

$$\frac{dx}{dt} = \lim_{h \to 0} \left(\frac{x(t+h) - x(t)}{h} \right) \tag{1}$$

Diferencias finitas

Si tratamos h como un número pequño (pero no cero) podemos *aproximar* la derivada simplemente por no considerar el límite:

$$\frac{dx}{dt} \approx \left(\frac{x(t+h) - x(t)}{h} \right). \tag{2}$$

Esta aproximación se llama la aproximación de *diferencias finitas*.

Discretización del tiempo

Tarea: Considerar la función $x(t) = t^3$.

1. Calcular la derivada de esta función con respecto al tiempo.
2. Calcular el valor de la derivada en el momento $t = 2$.
3. Calcular el valor de la derivada en el momento $t = 2$ con la aproximación de diferencias finitas y $h = 0.1$.
4. Repetir el cálculo con $h = 0.01$ y $h = 0.001$.

Otras aproximaciones de diferencias finítas

Hay un número infinito de posibles discretizaciones de una ecuación diferencial. La aproximación que vimos antes se llama la **diferencia adelantada**. Otra posibilidad es la **diferencia centrada**:

$$\frac{dx}{dt} \approx \left(\frac{x(t+h) - x(t-h)}{2h} \right).$$

Tarea: Considerar la función $x(t) = t^3$.

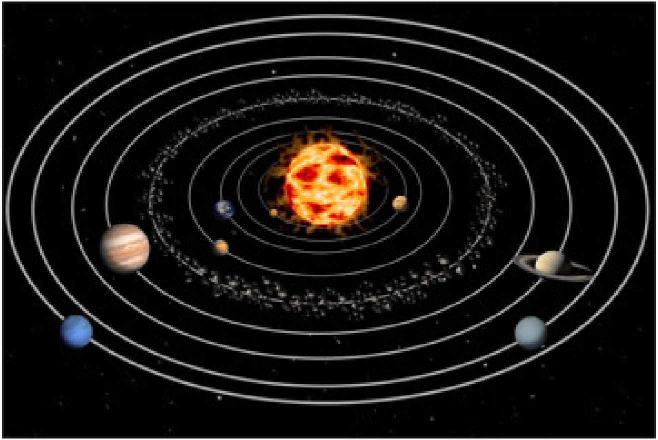
1. Calcular el valor de la derivada en el momento $t = 2$ con la **diferencia centrada** y $h = 0.1$.
2. Repetir el cálculo con $h = 0.01$ y $h = 0.001$.

Notación

Un comentario sobre notación: $x(t+h) \equiv x^{(i+1)}$, donde el índice i corresponde al momento t, así que $i+1$ es el momento $t+h$, $i+2$ es el momento $t+2h$, $i-1$ es el momento $t-h$, etc.

Sistema de la simulación

Supongamos que el Sol está en el orígen del sistema de coordenadas.



La ecuación de movimiento

$$\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{GMm}{d^2}\frac{1}{m}\hat{r} = \frac{GM}{d^2}\hat{r}.$$

donde d es la distancia entre las masas y $\hat{r}$ es el vector unitario que apunta en la dirección hacia la masa M (el Sol). Utilizando la derivada $d\vec{x}/dt = \vec{v}$ tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{x}}{dt} &= \vec{v} \\ \frac{d\vec{v}}{dt} &= \frac{GM}{d^2}\hat{r} \end{aligned} \tag{3}$$

Estas ecuaciones son vectoriales, pero se puede escribir las ecuaciones en componentes.

La ecuación de movimiento

Tarea: Vamos a considerar orbitas en un plano. Escribir las ecuaciones de movimiento en componentes (x, y, v_x, v_y).

La ecuación de movimiento

Tarea: Escribir las ecuaciones diferenciales (en componentes) en forma de diferencias finitas (diferencia adelantada). Resolver estas ecuaciones para los valores en el próximo paso de tiempo: $x^{(i+1)}$, $y^{(i+1)}$, $v_x^{(i+1)}$, $v_y^{(i+1)}$.

El diseño del algoritmo

Tarea: Diseñar un algoritmo que calcule la órbita de un planeta, dada su posición y velocidad inicial.